Procesos del Pensamiento Matemático Avanzado identificados en las respuestas a pruebas parciales de Matemática II

[1] **Robert Flórez**

[1] Docente universitario de la Universidad Nacional Abierta de Venezuela del área de Matemática.

Correo: rflorez@una.edu.ve

Recibido: Diciembre 2022 Aceptado: Julio 2023

RESUMEN

El presente artículo detalla los resultados de una investigación que tuvo como finalidad, analizar procesos del Pensamiento Matemático Avanzado identificados en las respuestas a pruebas parciales de Matemática II presentadas por estudiantes de las distintas carreras de la Universidad Nacional Abierta, Centro Local Barinas. La investigación fue cualitativa, teniendo como objeto de estudio ocho pruebas resueltas por los estudiantes en el lapso 2017-I, la recolección de información se llevó a cabo por medio de la observación y el análisis de contenido de Bardin; como técnica de análisis se utilizó la teoría de Dreyfus. El análisis reveló que las respuestas tenían en común, principalmente los procesos de representación simbólica, representación mental y sintetización. Algunas conclusiones obtenidas son las siguientes: (i) Los elementos característicos de los procesos del Pensamiento Matemático Avanzado, son propios del tema evaluado, (ii) Los procesos menos evidenciados fueron los de Modelación y Generalización, (iii) La teoría de Dreyfus permitió comprender acerca del por qué los estudiantes utilizaron los procesos del PMA identificados en las respuestas.

Palabras claves: pensamiento matemático avanzado; representación y abstracción; representación mental; visualización.

Advanced Mathematical Thinking processes identified in the answers to partial tests of Mathematic II

ABSTRACT

The present article details the result of a research aimed to analyze Advanced Mathematical Thinking processes identified in the answers to partial tests of Mathematic II, solved by students of distinct degrees of the National Open University at local center Barinas. The research was qualitative, having as an object of study eight tests solved by students in the period 2017-I, the recollection of information carried out by mean of the observation and content analyses of Bardin; as analyze technique, the theory of Dreyfus was used. Analyses revealed that the answers had in common, principally, processes of symbolic representation, mental representation and synthetizing. Some conclusions obtained are the following: (i) the characteristic elements of Advanced Mathematical Thinking processes are typical of the subject evaluated, (ii) the processes less evidenced were Modelling and Generalization, (iii) Dreyfus's Theory allowed understand about why the students used the processes of AMT identified in the answers.

Keywords: advanced mathematical thinking; representation and abstraction; mental representation; visualization.

INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones en el área de la cognición matemática, establecen que existen dos tipos de conocimientos, el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental, ambos juegan un papel importante en el aprendizaje matemático, específicamente en el desarrollo de habilidades de razonamiento, comprensión y sobre todo en la resolución de problemas, y más importante aún, en el desarrollo de habilidades cognitivas para dar soluciones a problemas de la vida real, especialmente aquellos relacionados con el campo laboral.

De acuerdo con Hiebert y Lefevre (1986, citados en Castro, Prat y Gorgorió, 2016) el conocimiento conceptual es caracterizado como "una rica red de relaciones entre piezas de información que permiten flexibilidad en el acceso y uso de la información (saber qué o porqué)" (p. 7) mientras que el conocimiento procedimental lo caracterizan como:

> Un conocimiento compuesto por dos partes distintas. La primera de ellas, conformada por el lenguaje formal o el sistema de representación simbólico de las matemáticas. Mientras que, la segunda parte, se compone por los algoritmos o reglas utilizados para resolver las tareas matemáticas; instrucciones ejecutadas en una secuencia linealmente predeterminada, que paso a paso establecen como completar tareas (saber cómo). (p. 7)

Aunque estos tipos de conocimientos poseen diferencias en cuanto a la manera en que son llevados a cabo, existe consenso en que ambos se asocian durante el proceso de aprendizaje (Stelzer, Andrés, Canet-Juric, Introzzi y Urquijo, 2016). Desde este punto de vista, se puede considerar que el aprendizaje de la matemática parte tanto del dominio conceptual como del procedimental, razón por la cual en las evaluaciones se proponen problemas o preguntas según el tipo de conocimiento a verificar o, una combinación de ambos.

Por otro lado, el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) en la actualidad, constituye una importante área de investigación para quienes buscan comprender, qué es lo que sucede en la mente de un estudiante cuando realiza actividades matemáticas, especialmente las relacionadas con conceptos, definiciones, demostraciones, entre otros, para tal fin, se basan en el estudio de los denominados Procesos del PMA siendo David Tall y Tommy Dreyfus los más destacados investigadores en el área.

Con relación a estos procesos del PMA, se producen durante el desarrollo de actividades relacionadas con el aprendizaje de tópicos de matemática avanzada[1], es decir, en la construcción de definiciones, elaboración de significados de objetos matemáticos, aplicación de conceptos en la resolución de problemas, entre otras actividades, y quedan evidenciados de manera implícita en las producciones escritas de los estudiantes, siendo una de ellas, las pruebas de desarrollo.

Ahora bien, cuando un estudiante lleva a cabo algún proceso del PMA, como el de argumentar, por citar un ejemplo, busca establecer la veracidad o falsedad de una determinada afirmación apoyándose en un discurso que puede tener un lenguaje técnico empleando símbolos, conceptos, o simplemente utilizando ejemplos/contraejemplos, siendo todos éstos, elementos característicos que el estudiante utiliza para argumentar y se convierten, además, en evidencias de dicho proceso mental; no obstante, en las respuestas todo esto varía según el nivel de razonamiento que el estudiante posea.

Así mismo, el estudiante puede hacer uso de varios procesos del PMA, sin embargo, de entre tantos de los que puede valerse durante la estructuración de la solución a un problema o actividad matemática y que, además, han sido objeto de estudio por diversos investigadores del tema, aquellos procesos estudiados por Dreyfus son los que más interesaron para el desarrollo de esta investigación, no obstante, en las respuestas aportadas por los estudiantes, se pueden distinguir algunos de tales procesos e incluso todos, pero, al estar éstos tan implícitos en las respuestas, resulta muchas veces, difícil identificarlos para su estudio.

Ahora, en la resolución de un determinado problema, los estudiantes pueden hacer uso en común, de algunos de los procesos anteriormente mencionados, coincidiendo o no en su forma de razonar, argumentar, utilizando símbolos, notaciones, gráficos, fórmulas, definiciones, conceptos, teoremas, entre otros, que muestren una apreciación sobre la manera en cómo abordaron separadamente un mismo problema, sin embargo, la dificultad para determinar los procesos comunes radica en la variedad de elementos característicos que se pueden identificar en las respuestas.

[1] También pueden producirse en actividades relacionadas con tópicos de Matemática Elemental.

Por otro lado, al momento de analizar las respuestas de los estudiantes y corregir las mismas, se pueden presentar interrogantes tales como, por ejemplo: ¿por qué razón argumentó de esta manera?, ¿cómo se relacionan los fragmentos de cada argumento y por qué? ¿con qué finalidad el estudiante utilizó símbolos, terminologías, gráficos, definiciones u otros objetos matemáticos? Es decir, interrogantes cuyas respuestas permitirían comprender un poco sobre el pensamiento matemático (elemental o avanzado) que posee el estudiante.

Ante lo expuesto, se llevó a cabo esta investigación con el objetivo de analizar procesos del Pensamiento Matemático Avanzado identificados en las respuestas a pruebas parciales de la asignatura Matemática II que fueron presentadas por estudiantes de distintas carreras de la Universidad Nacional Abierta (UNA), centro local Barinas, identificando en primer lugar, elementos que evidencian procesos del PMA definidos por Dreyfus, para luego establecer qué procesos tenían en común las respuestas de los estudiantes y finalmente analizarlos con base en la teoría de Dreyfus.

DESARROLLO

Procesos del Pensamiento Matemático Avanzado según Dreyfus

Procesos presentes en la Representación.

Representación Simbólica: Los símbolos constituyen un elemento esencial en cualquier rama de la matemática, ya que, a través de ellos, el conocimiento implícito que posee una persona puede hacerse explícito por medio de éstos (Dreyfus, 2002); así mismo, este investigador, citando a Olson & Cambell (s.f.) afirma que “los símbolos involucran relaciones entre signos y significados” (p. 49), además, establece que las representaciones simbólicas, sean éstas escritas o habladas, tienen el propósito de comunicar más fácilmente sobre un concepto del cual se esté tratando en determinada actividad matemática.

Representación Mental: de acuerdo con Dreyfus (2002) al hablar o pensar sobre un objeto matemático, se tiende a relacionarlo con algo que se tiene en mente, es decir, con una representación mental del objeto, así mismo, define este tipo de representación como “(…) un esquema interno o marcos de referencia que una persona usa para interactuar con el mundo externo" (p. 50) y el mismo difiere de persona a persona.

Cambio de Representación y Traducción: Dreyfus (2002) considera que el simple hecho de tenerse varias representaciones de un mismo concepto no es suficiente para poder llevar a cabo un uso flexible del mismo en la resolución de un determinado problema, sino que es necesario cambiar de una representación a otra siempre y cuando este último sea más eficiente para el siguiente paso en la resolución del problema. Por otro lado, el proceso de traducción está muy ligado al proceso de cambio de representaciones, de acuerdo con Dreyfus (2002) este proceso consiste en "pasar de una formulación de un enunciado matemático o problema a otro" (p. 52).

Visualización: La visualización también juega un papel fundamental en el desarrollo del PMA y un rol muy esencial en el trabajo de muchos matemáticos (Dreyfus, 2002) ya que además de poder representar un objeto matemático, se puede, a partir de dicha representación, analizar, conjeturar, razonar y demostrar entre otros procesos mentales, no obstante, Dreyfus (2002) establece que por medio del proceso de la visualización, las representaciones mentales pueden originarse, es decir, ambos procesos se relacionan.

Modelado: Es el proceso mediante el cual una determinada situación es traducida al lenguaje matemático dando lugar al denominado Modelo, para Dreyfus (2002) este proceso consiste en "encontrar una representación matemática para un objeto o proceso no matemático. En este caso, significa construir una estructura matemática o teoría que incorpora características esenciales del objeto, sistema o proceso a ser descrito" (p. 53) con la finalidad de estudiar el comportamiento de tal proceso u objeto matemático, así mismo, para este investigador, el proceso de representar es análogo al proceso de modelado.

Procesos presentes en la Abstracción.

Generalización: Para Dreyfus (2002) este proceso se define como derivar o inducir desde lo particular, identificando puntos en común de propiedades, relaciones, etc., del objeto en estudio con el fin de expandir el o los dominios de validez de aquello que se estudia.

Sintetización: Sintetizar significa "combinar o componer partes de tal manera que formen un todo, una entidad. Este todo a menudo equivale a más que la suma de sus partes" (Dreyfus, 2002, p. 54). Dreyfus afirma que un gran número de hechos relacionados con distintos tópicos matemáticos como por ejemplo de Álgebra Lineal son aprendidos por los estudiantes de manera aislada, sin embargo, más tarde en su proceso de aprendizaje, todos esos hechos aislados que aparentemente no poseen relación alguna, se integran en una sola imagen en la cual se comprimen e interrelacionan, es lo que se denomina una síntesis.

METODOLOGÍA

La investigación se centró en el paradigma interpretativo con un enfoque cualitativo, entendiéndose por paradigma a "una manera de representar objetivamente un conocimiento, un modelo al cual se llega para convalidar una manera de percibir la realidad, utilizando un lenguaje y una forma particular de ver las cosas" (Palella & Martins, 2012, p.35) a través del cual se buscó estudiar los procesos del PMA con base en la teoría de Tommy Dreyfus, que se encuentran de manera implícita en las respuestas dadas por los estudiantes de la UNA Centro Local Barinas inscritos en la asignatura de Matemática II en el lapso académico 2017-I.

Además, la investigación tuvo un nivel descriptivo y un diseño de campo, dado que los datos fueron obtenidos de las respuestas a pruebas parciales de Matemática II, siendo una investigación abierta ya que no se formularon hipótesis.

Como objeto de estudio, se consideraron las respuestas aportadas por los estudiantes a dos pruebas parciales que en conjunto evaluaban siete objetivos, siendo en total seis (06) estudiantes que las presentaron, de estos seis estudiantes, cinco presentaron la primera prueba parcial y tres la segunda prueba parcial para un total de ocho juegos[2] de respuestas.

Por otro lado, como técnicas de recolección de información, se aplicó la observación y el análisis de contenido de Bardin la cual tiene por finalidad, descubrir significados en los mensajes escritos o hablados por un emisor o grupo de emisores, así mismo, como instrumentos de recolección de información se utilizaron las pruebas parciales presentadas por los seis estudiantes y un cuadro de Agrupamientos y Categorías el cual fue tomado del trabajo realizado por Viel y Pereira (2015) ya que el mismo se ajustaba perfectamente a los fines de la presente investigación.

[2] Cada juego consiste en varias páginas con las respuestas a las preguntas por cada prueba.

PROCEDIMIENTO DE APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DE CONTENIDO:

FASE I: ORGANIZACIÓN DEL ANÁLISIS

Pre-análisis: se inició con una lectura fluctuante de las pruebas parciales, para luego, proceder a la elección de los documentos; por medio de la lectura fluctuante se eligieron respuestas sin importar si estaban completas o incompletas, correctas o incorrectas; esto constituyó el denominado *Corpus* y así, preparar el material, organizando las pruebas en función de la carrera que cursaba el estudiante.

Seguidamente, se codificaron los exámenes de la siguiente manera: “E” que significaba estudiante, “C”, “M” o “IS” que significaban Contaduría, Matemática e Ingeniería de Sistemas respectivamente y con los números “1”, “2” y “3” para diferenciar a los estudiantes de una misma carrera, así por ejemplo el código EC-1 se refería al Estudiante de Contaduría 1 y EC-2 al Estudiante de Contaduría 2…

La exploración del Material: una vez constituido el corpus, se realizó una descripción detallada de las soluciones de cada pregunta por cada prueba, esto permitió realizar una comparación de cada descripción con las definiciones de procesos del PMA dadas por Dreyfus y así identificar elementos que referenciaban a esos procesos.

FASE II: CODIFICACIÓN

Con la descripción detallada de cada respuesta, se procedió a determinar aquellos segmentos de párrafos o frases que tenían ideas semejantes entre las respuestas de los estudiantes y, a la vez, compararlos con las definiciones de procesos del PMA dadas por Dreyfus para así construir las denominadas unidades de registro (que son los agrupamientos), para ello se eligió como unidades de registro: el tema.En este caso, los procesos del PMA sirvieron de guía para elaborar los enunciados de los agrupamientos mientras que las unidades de contexto, estuvieron referidas a los segmentos de párrafos de la descripción que permitieron dar significado a las unidades de registro.

Como *regla de enumeración* se utilizó la *presencia o ausencia* así pues, como la lista de referencia de procesos del PMA eran aquellos procesos involucrados en representación y abstracción, entonces al obtenerse unidades de registro que se relacionaban con, por ejemplo, representación simbólica, se decidió utilizar dichas unidades ya que "apuntaban" hacia tales procesos referenciados, es decir, *la presencia* como regla de enumeración fue lo que condujo a establecer que dichos registros eran significativos.

FASE III: CATEGORIZACIÓN

Una vez determinadas las unidades de registro, se procedió a clasificarlas en categorías, según Bardin (1977) las categorías reúnen un grupo de elementos bajo un título, en razón de esto, las unidades de registro se clasificaron siguiendo la teoría de Dreyfus (criterio) es decir, se consideraron como categorías: representación y abstracción en los cuales clasificar los agrupamientos (unidades de registro). Definidas las unidades de registro y las categorías, se procedió a identificar a los estudiantes que en sus respuestas presentaban evidencias o elementos de los que estaban señalados en cada unidad de registro (agrupamiento).

FASE IV: INFERENCIA

Con los cuadros de agrupamientos obtenidos, se decidió confrontar los resultados con la teoría de Dreyfus, es decir, se procedió a interpretar cada proceso del PMA en función de los elementos identificados.

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

A continuación, se exponen los resultados obtenidos producto de la aplicación de los procedimientos expuestos en la metodología, así como también de los respectivos análisis y de las interpretaciones efectuadas a la luz de la teoría de Dreyfus. En cuanto a la identificación de elementos que evidencian procesos del PMA, se consideró para el presente apartado las soluciones aportadas por dos estudiantes (EC-1 y EM-2) a la pregunta tres de la primera prueba parcial cuyo enunciado fue el siguiente:

OBJ 3 PTA 3 Demuestre que la función $f(x) = x^2 - 2$, tiene al menos una raíz real en el intervalo [1, 2].

Figura 1: Enunciado del objetivo 3 pregunta 3

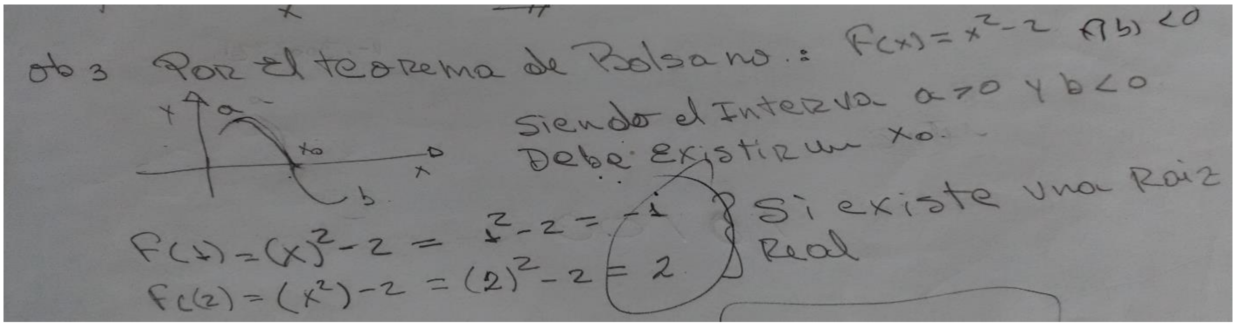


Figura 2. Solución del estudiante EC-1 a la pregunta Tres.

Evidencias de procesos del PMA: utiliza símbolos tales como "<", ">" y "}" y las notaciones: "*a>0*", "*b<0*" para referirse a los valores de la función en los extremos del intervalo, "x_0" para indicar la raíz de *f(x)* en dicho intervalo, por lo que hubo representación simbólica; el proceso de representación mental se evidencia ya que al representar gráficamente el teorema con todos sus elementos, es indicativo que posee una imagen mental sobre el teorema, así mismo, las notaciones y los símbolos antes mencionados poseen un significado para el estudiante quien los utilizó de manera correcta.

Por otro lado, se evidencia el proceso de cambio de representación y traducción ya que el estudiante, representa gráficamente la segunda hipótesis del teorema de Bolzano para luego hacer el cambio a representación verbal al especificar que "*siendo el intervalo a>0 y b<0 debe existir un* x_0" siendo esto una traducción. Al utilizar el gráfico e incorporar en él simbólicamente las condiciones del teorema, se evidencia que el proceso de visualización fue llevado a cabo ya que, en el mismo, el estudiante visualizó tanto el intervalo, la raíz, los valores de *f(x)* en los extremos del intervalo e incluso visualizó que la función es continua. Por último, Sintetizó, debido a que combinó la hipótesis dada en forma gráfica y verbal con el proceso de sustitución verificando el cambio de signo de *f(x)* en el intervalo dado para llegar a la conclusión de que en el mismo existe una raíz.

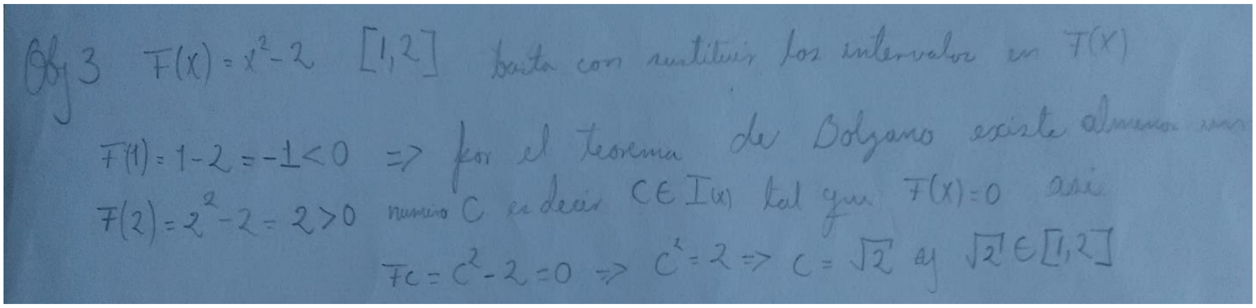


Figura 3. Solución del estudiante EM-2 a la pregunta Tres.

Evidencias de PM: el estudiante al utilizar símbolos tales como “<”, “>”, “∈”, “→”, la notación “*c*” para la incógnita que representa el valor de la raíz así como las notaciones: “*I(x)*” para referirse al intervalo, “$F(x)$” la función y “Fc” la función en términos de “*c*”, se hace evidente el proceso de representación simbólica; además, se evidencia que comprende los significados de tales símbolos y notaciones, por otro lado, al escribir la expresión “*F(x)=0*” es indicativo de que el estudiante comprende que, el valor de la variable “*x*” que anula la ecuación, es el valor de la raíz de la función, por lo que planteó el polinomio como una ecuación de segundo grado igualada a cero y determinó así su raíz, es decir, se evidencia el proceso de representación mental.

Otro proceso que se identifica en la respuesta es el de cambio de representación y traducción ya que pasó de la función $f(x) = x^2 - 2$ a la ecuación $c^2 - 2 = 0$, y al mismo tiempo constituye una traducción del problema dado que ésta no es más que una ecuación homogénea; por último, combina una hipótesis del teorema de Bolzano con el proceso de resolución de una ecuación de segundo grado a fin de dar solución al problema propuesto, además de concluir que $\sqrt{2} \in [1; 2]$ por lo que el estudiante Sintetizó.

Una vez identificados los elementos que evidencian procesos del PMA en todas las respuestas, se procedió a establecer qué procesos había en común en las respuestas de los estudiantes a cada pregunta, a continuación, se presenta un cuadro de agrupamientos y categorías obtenido con los elementos identificados en las respuestas a la pregunta tres:

Cuadro 1

Agrupamientos y Categorías de procesos del PMA identificados en las respuestas a la pregunta Tres.

	Agrupamientos		Estudiantes
Representación	**G1**	Utiliza símbolos y notaciones para referirse a objetos matemáticos, así como también para establecer relaciones entre éstos.	EC-1; EM-2; EM-3.
	G2	Establece la continuidad de la función en el intervalo dado, verificando así la primera condición del teorema de Bolzano.	EC-1; EM-3.
	G3	Reconoce que a valores de la función con signos distintos evaluados en los extremos del intervalo implica la existencia de la raíz.	EC-1; EM-2; EM-3.
	G4	Presenta la función como una ecuación del tipo $F(x) = 0$ y aplica procedimientos algebraicos para obtener el valor de la raíz, indicando además que ésta pertenece al intervalo dado.	EM-1; EM-2, EM-3.
	G5	Utiliza gráficos para representar: el intervalo, la función, el teorema de Bolzano.	EC-1; EM-1; EIS-1; EM-3.
Abstracción	**G6**	Evidencia tener conocimientos sobre teoremas relacionados con la demostración de existencia de raíces, específicamente del teorema de Bolzano; comprende claramente su definición y condiciones y los aplica al problema a fin de efectuar la demostración solicitada.	EC-1; EM-2; EM-3.

Nota. Elaboración propia.

De los procesos asociados a los agrupamientos obtenidos se tienen: Representación Simbólica (G1), Representación Mental (G2 y G3), Cambio de Representación y Traducción (G4), Visualización (G5) y Sintetización (G6); así mismo, en la columna "estudiantes" se aprecian los estudiantes quienes en sus respuestas plasmaron elementos característicos de los procesos antes mencionados.

En general y, de acuerdo con los agrupamientos y categorías que se obtuvo de las respuestas a cada pregunta, se pudo constatar que los estudiantes, en sus respuestas tenían en común los siguientes procesos del PMA: representación simbólica evidenciado en las respuestas de las preguntas 1, 2, 3, 4, 5 y 7; representación mental en las respuestas a las preguntas 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7; cambio de representación y traducción en las respuestas a las preguntas 1, 2, 3, 5 y 7; visualización en 1, 3, 4, 5, 6 y 7; modelación en 5 y 7, procesos referidos a la categoría de Representación mientras que el proceso de generalización en las respuestas a las preguntas 5 y 7 y, el de sintetización en las respuestas a todas las preguntas, siendo estos procesos vinculados a la categoría de Abstracción**.**

Identificados los procesos del PMA que había en común en las respuestas, se procedió a analizarlos en función de la teoría de Dreyfus y sobre los elementos observados en dichas respuestas, los resultados fueron los siguientes:

El proceso de Representación Simbólica: Cada estudiante externalizó el conocimiento que tenía del tema objeto de evaluación por medio de notaciones y símbolos, algunos de tales notaciones se referían a objetos matemáticos que guardaban relación con el tema y que sirvieron al estudiante para dar sentido a sus argumentos, así mismo, las definiciones o partes de éstas, dadas en las respuestas por los estudiantes EC-1 (ver figura 2), EM-2 (ver figura 3) y EM-3 se componían de símbolos y notaciones específicas cuyos significados, ellos comprendían. Así, por ejemplo, el estudiante EM-3, en su respuesta al objetivo tres, expresó lo siguiente:

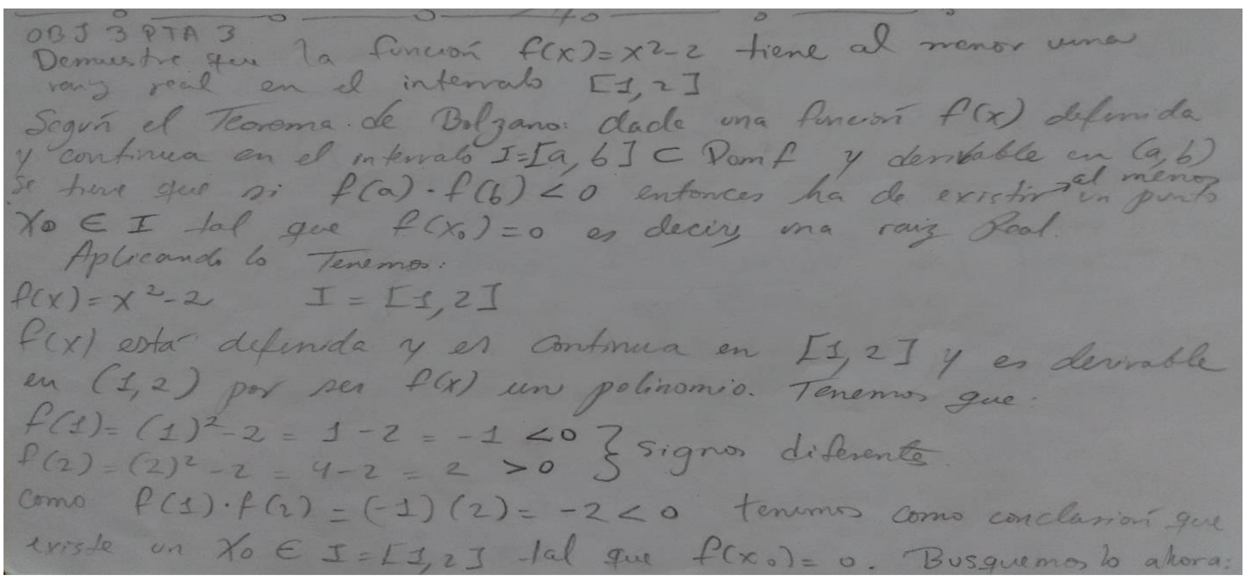

OBJ 3 PTA 3
Demuestre que la función $f(x)=x^2-2$ tiene al menos una raiz real en el intervalo $[1,2]$
Según el Teorema de Bolzano: dada una función $f(x)$ definida y continua en el intervalo $I=[a,b] \subset Dom f$ y derivable en (a,b) se tiene que si $f(a)\cdot f(b)<0$ entonces ha de existir al menos un punto $X_0 \in I$ tal que $f(x_0)=0$ es decir una raiz Real.
Aplicando lo Tenemos:
$f(x)=x^2-2$ $I=[1,2]$
$f(x)$ esta definida y es continua en $[1,2]$ y es derivable en $(1,2)$ por ser $f(x)$ un polinomio. Tenemos que:
$f(1)=(1)^2-2=1-2=-1<0$ } signos diferente
$f(2)=(2)^2-2=4-2=2>0$
Como $f(1)\cdot f(2)=(-1)(2)=-2<0$ tenemos como conclusion que existe un $X_0 \in I=[1,2]$ tal que $f(x_0)=0$. Busquemos lo ahora:

Figura 4. Extracto de la respuesta a la pregunta 3 del estudiante EM-3

Como se puede observar en la figura cuatro, el estudiante EM-3 planteó la definición del teorema de Bolzano utilizando muy bien los símbolos y notaciones en la resolución del problema, por otro lado, estos tres estudiantes utilizaron notaciones y símbolos en sus respuestas a las demás preguntas (al igual que el resto de los estudiantes) aunque cabe resaltar que algunos utilizaron pocos símbolos o notaciones o una combinación de ambos. Todo esto es indicativo de que la representación simbólica es indispensable para ellos, pues les permite expresar lo que conocen y lo que comprenden del aspecto conceptual o procedimental del tema objeto de evaluación.

De acuerdo con Dreyfus, los símbolos y notaciones permiten hacer explícito el conocimiento implícito que una persona posee, en este caso, los conocimientos sobre el aspecto conceptual y/o procedimental de cada estudiante se hizo gracias al uso de símbolos y notaciones muy bien vinculados con el tema, así como también de la manipulación de los mismos, aunque esto no implica llegar a resultados correctos.

Por otro lado, en las respuestas señaladas anteriormente, se puede apreciar que los símbolos y las notaciones tienen cada uno un significado y, en conjunto, emiten un mensaje, un mensaje que es implícito pero que se lee y se entiende perfectamente, de acuerdo con Dreyfus (2002), las representaciones simbólicas escritas o habladas tienen el “(…) propósito de comunicar sobre el concepto más fácilmente” (p. 50); es decir, sin necesidad del uso de expresiones verbales, estos símbolos y notaciones fueron el medio de comunicación más fácil y efectiva sobre el concepto, del cual los estudiantes se valieron para manifestar sus conocimientos.

El proceso de Representación Mental: Este proceso se evidenció en todas las respuestas, con la particularidad de que algunos de los estudiantes hicieron uso de esquemas o marcos de referencia que les sirviera para dar inicio al proceso de resolución del problema propuesto, así, por ejemplo, en la pregunta dos, los estudiantes EC-1 y EM-3 iniciaron sus respuestas planteando: EC-1 un cambio de variable (ver figura 5) y EM-3 definiendo la regla de L’Hópital (ver figura 6)

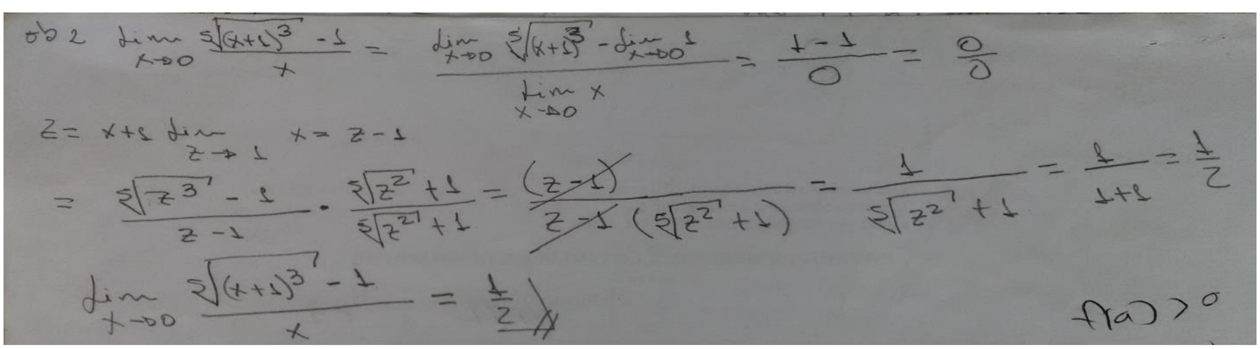


Figura 5: Respuesta a la pregunta 2 del estudiante EC-1

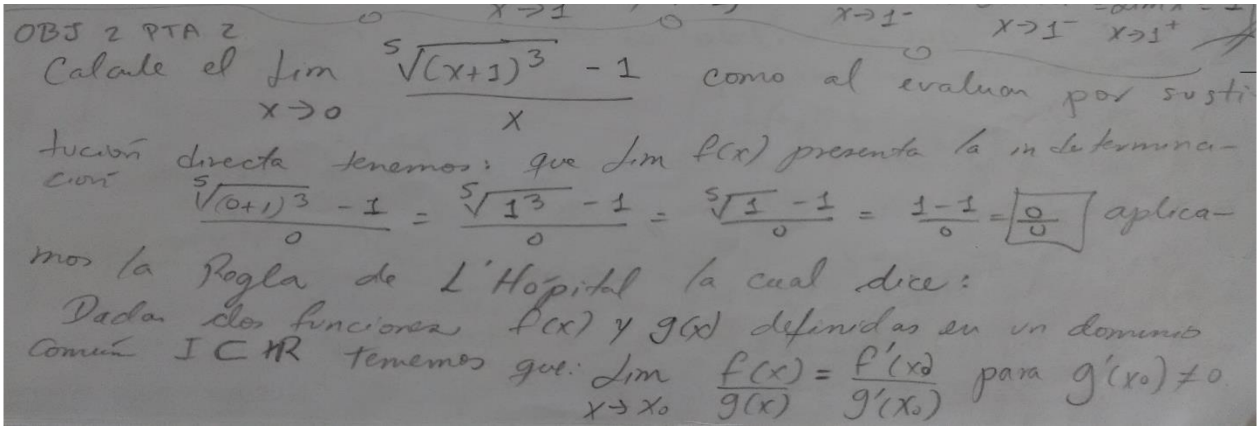


Figura 6: Respuesta a la pregunta 2 del estudiante EM-3

Otro ejemplo que se puede considerar son las respuestas a la pregunta siete, en las cuales los estudiantes EC-2, EM-2 y EM-3 iniciaron planteando la matriz ampliada del sistema, como se puede apreciar en la siguiente figura donde se muestra un extracto de la respuesta del estudiante EM-2 a la pregunta siete que evaluaba el método de Gauss-Jordan:

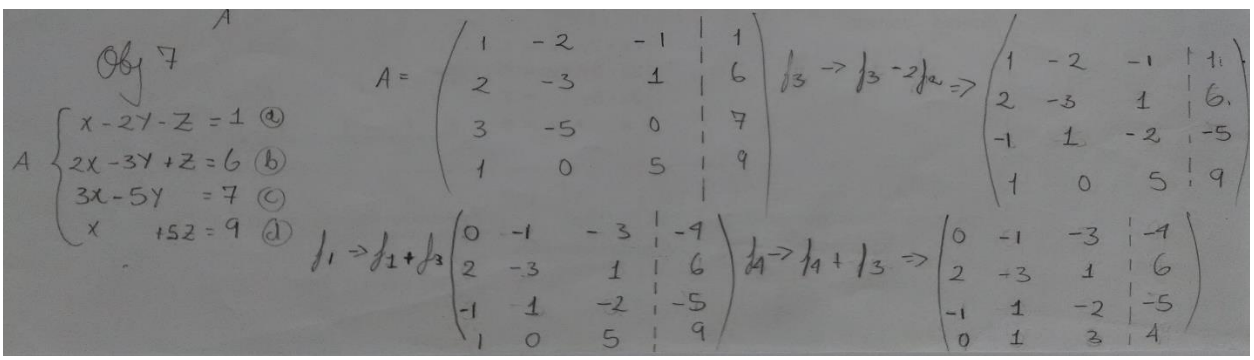


Figura 7: Extracto de la respuesta a la pregunta 7 del estudiante EM-2

Estos estudiantes al reconocer el tema de evaluación, procedieron a generar una solución basándose en algo que ya tenían fijado en la mente que no es más que el procedimiento de dicho tema, así, en las respuestas al objetivo siete donde los estudiantes plantearon la matriz ampliada, es claro que al condicionarse el problema a la aplicación del método de Gauss-Jordan, lo primero que se les vino a la mente fue precisamente dicha matriz ampliada ya que es el primer paso del método, en este caso, coincidieron en esa representación mental y por supuesto en el resto de los pasos para la aplicación del método.

Por otro lado, en las respuestas al objetivo dos, EC-1 y EM-2 llevaron a cabo un cambio de variable como consecuencia de la indeterminación 0/0, mientras que EM-3 presentó la definición de la regla de L'Hópital y la aplicó, en este caso, cada estudiante utilizó una representación mental distinta, sin embargo, se destaca que la indeterminación 0/0 activó la representación mental antes mencionada en cada uno, es decir, relacionaron esa indeterminación con algo que ya tenían en mente.

De acuerdo con Dreyfus (2002), una representación mental "refiere a un esquema central o marco de referencia que una persona usa para interactuar con el mundo externo" (p. 50), en este caso, la interacción que se dio fue el de la resolución del problema, por otro lado, y aunque EC-1 y EM-2 utilizaron cambios de variables, sus procedimientos e incluso las variables fueron distintas, según Dreyfus (2002), las personas pueden tener representaciones mentales distintas para un mismo concepto, en este caso, del límite indeterminado 0/0.

El proceso de Cambio de Representación y Traducción: Este proceso se evidenció en las respuestas de las preguntas 1, 2, 3, 5 y 7; así, por ejemplo, en la pregunta siete, los estudiantes EC-2, EM-2 y EM-3 pasaron del sistema de ecuaciones a una matriz ampliada (en la figura 7 se aprecia el cambio realizado por EM-2) siendo esto un cambio de representación, es decir, de una representación algebraica a una matricial, no obstante, esta matriz ampliada constituye a su vez una traducción del problema debido a que ambas tienen el mismo significado, pero con representación distinta.

En las respuestas aportadas por estos estudiantes, se pudo observar que dicha transformación facilitó la aplicación del método y sobre todo de los cálculos y determinación de los pivotes; de acuerdo con Dreyfus (2002), tener varias representaciones de un mismo concepto no es suficiente para un uso flexible del mismo, sino que es necesario pasar de una representación a otra siempre y cuando ésta última sea más eficiente, en este caso, tanto la representación algebraica como la matricial, están ligadas al mismo objeto matemático que es el sistema de ecuaciones.

Por otro lado, los estudiantes EM-2 y EM-3 al finalizar el proceso de operaciones entre filas de las matrices, llegaron a una matriz con coeficientes todos iguales a cero, por lo que decidieron transformar dicha matriz en ecuaciones, que fue el caso de EM-2, y en un sistema de ecuaciones tal y como lo hizo EM-3 (ver figura 9), esto con la finalidad de continuar con la resolución del problema hasta culminar en un valor o una expresión para las variables “x”, “y” y “z”, una vez más, la traducción estuvo implícita ya que tanto la matriz como el sistema de ecuaciones en el caso de EM-3 eran lo mismo, sin embargo, EM-2 planteó ecuaciones que no se correspondían con lo obtenido en la matriz (ver figura 8).

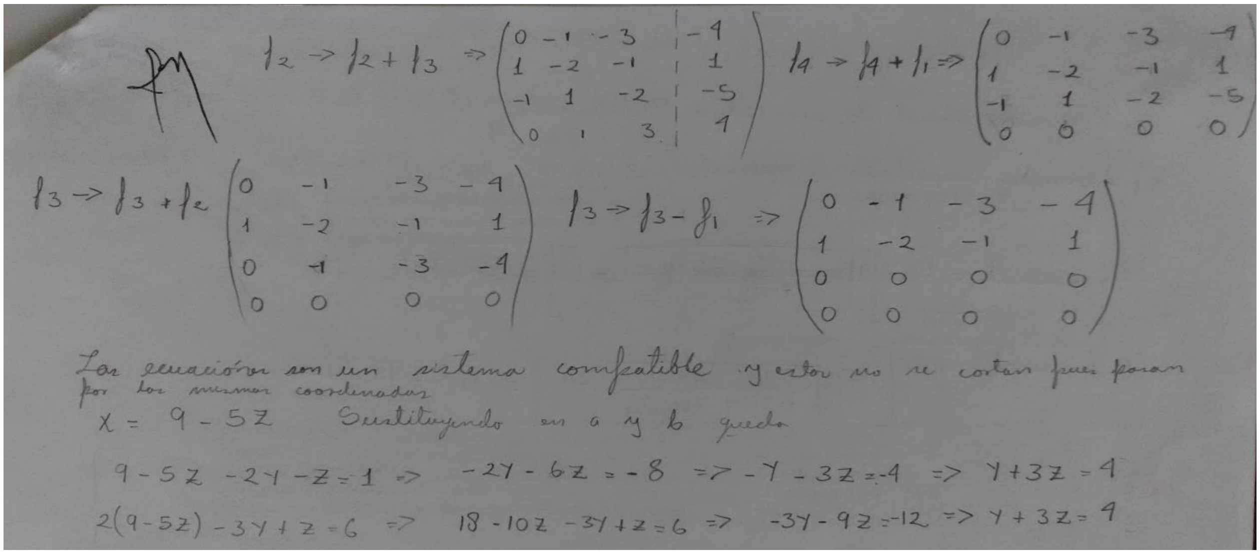


Figura 8: continuación de la respuesta a la pregunta 7 del estudiante EM-2

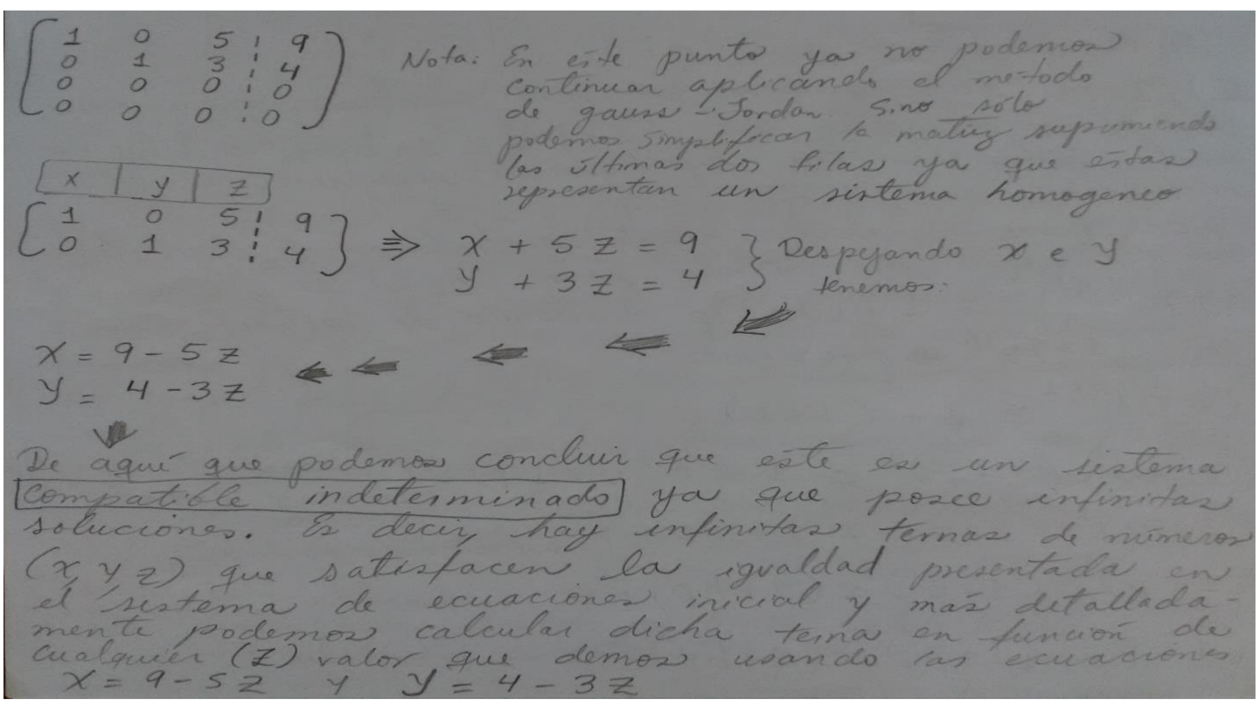


Figura 9: Extracto de la respuesta a la pregunta 7 del estudiante EM-3

El proceso de Visualización: Este proceso del PMA se llevó a cabo de cuatro maneras diferentes: la primera de ellas, los estudiantes, a partir del gráfico dado en la primera pregunta, procedieron a dar respuesta a los ítems de la misma, segundo, mediante el planteamiento de fórmulas, los estudiantes relacionaron términos de la misma con funciones que representaban una composición de otras funciones, o simplemente un producto de funciones elementales como lo fue en el caso de la pregunta cuatro, tercero, elaboración de gráficos a fin de apoyar la respuesta (ver figura 2) y, cuarto, visualizar elementos de un objeto matemático a fin de operar con ellos o proponer fórmulas como lo fue en las preguntas seis y siete donde el objeto matemático era una matriz (ver figuras 7, 8 y 9).

Por otro lado, al ser estas fórmulas y gráficos, una externalización de la representación mental que tenían, se infiere que los estudiantes por medio de la visualización antes descritas, hicieron que éstas representaciones se llevaran a cabo; de acuerdo con Dreyfus (2002), la visualización permite que las representaciones mentales puedan originarse, es decir, por medio de ella, se forman imágenes en la mente a las cuales el individuo recurre toda vez que la asocia con un determinado hecho.

No obstante, para la pregunta cinco, los estudiantes EM-1 y EM-2 elaboraron un gráfico en el cual representaron tanto los puntos críticos como el sentido de crecimiento/decrecimiento de la función, aunque cabe destacar que EM-1 utilizó el plano cartesiano mientras que EM-2 solo utilizó la recta real y en ella plasmó parte de los resultados obtenidos (ver figura 10); según Dreyfus (2002), la visualización permite representar objetos matemáticos y a partir de ellas, realizar conjeturas, razonar, demostrar, entre otros procesos, por lo que en este caso, los gráficos elaborados por los estudiantes, tenían como propósito más bien el de demostración ya que en ellos se recogen tanto los puntos críticos como el sentido de crecimiento y decrecimiento de la función dada, lo que a su vez permiten mostrar los intervalos solicitados en la pregunta.

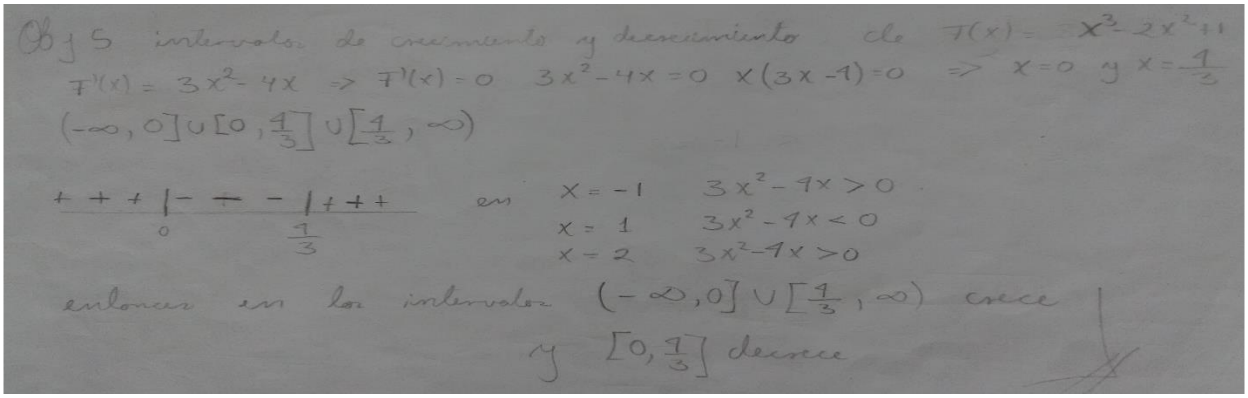
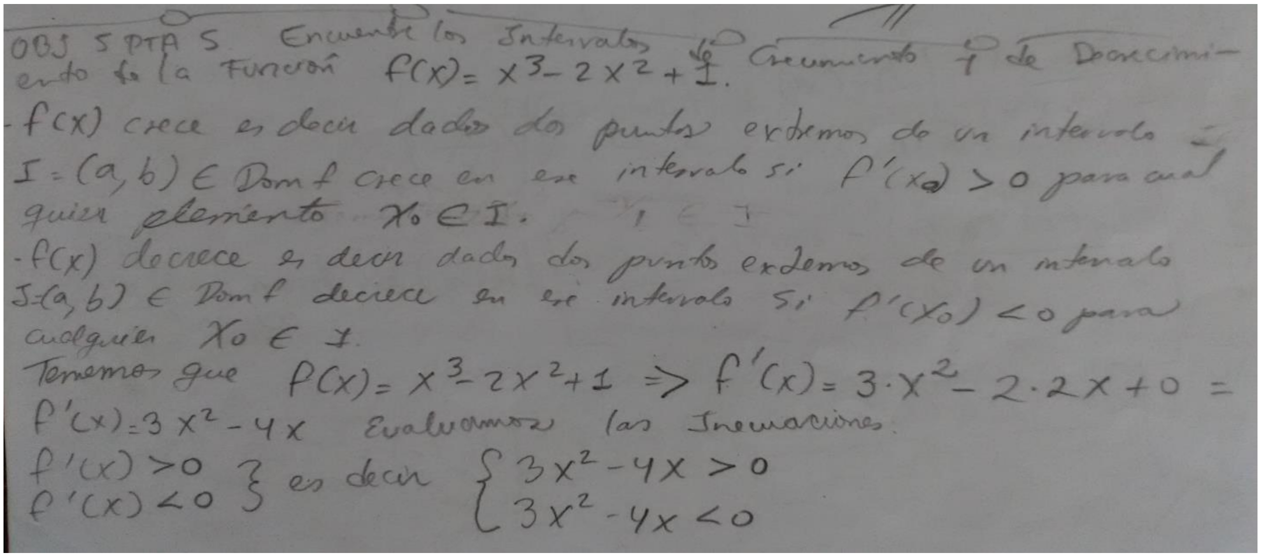


Figura 10. Extracto de la respuesta a la pregunta 5 del estudiante EM-2

El proceso de Modelación: Este proceso fue uno de los menos utilizados por los estudiantes, siendo las respuestas a las preguntas cinco y siete donde se pudo identificar elementos que evidenciaban el mismo; en tal sentido, para la pregunta cinco, solo los estudiantes EM-2 y EM-3 presentaron un modelo en sus respuestas y en la pregunta siete, EC-2, EM-2 y EM-3 también llevaron a cabo dicho proceso.

Como ejemplo se destaca las respuestas de EM-2 y EM-3 a la pregunta cinco, en ella, EM-2 presentó un gráfico (ver figura 10) en el cual se incluían los puntos críticos, los intervalos y los signos "+" y "-", todos estos elementos son representativos del tema de crecimiento/decrecimiento de una función en un intervalo dado, mientras que EM-3 presentó un sistema de inecuaciones con la derivada de la función (ver figura 11), primero como síntesis de las definiciones dada y luego como un sistema que modela el problema propuesto, a partir del cual se obtienen los intervalos solicitados por medio de operaciones algebraicas.


OBJ 5 PTA 5 Encuentre los Intervalos de Crecimiento y de Decrecimiento de la Función $f(x)=x^3-2x^2+1$.

- $f(x)$ crece es decir dados dos puntos extremos de un intervalo $I=(a,b) \in$ Dom f crece en ese intervalo si $f'(x_0)>0$ para cualquier elemento $x_0 \in I$.

- $f(x)$ decrece es decir dados dos puntos extremos de un intervalo $I=(a,b) \in$ Dom f decrece en ese intervalo si $f'(x_0)<0$ para cualquier $x_0 \in I$.

Tenemos que $f(x)=x^3-2x^2+1 \Rightarrow f'(x)=3\cdot x^2-2\cdot 2x+0=$

$f'(x)=3x^2-4x$ Evaluamos las Inecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} f'(x)>0 \\ f'(x)<0 \end{matrix}\right\} \text{ es decir } \begin{cases} 3x^2-4x>0 \\ 3x^2-4x<0 \end{cases}$$

Figura 11. Extracto de la respuesta a la pregunta 5 del estudiante EM-3

De acuerdo con Dreyfus (2002) un modelo puede ser una estructura matemática o una teoría en la cual se incorporan características del objeto, proceso o sistema a ser descrito, para el caso de los estudiantes mencionados, ambos construyeron una estructura matemática ya que en ellos fueron incorporados objetos matemáticos muy bien definidos e interrelacionados, EM-2 por ejemplo, al incluir los signos “+” y “-” en los intervalos, completa la representación total del problema propuesto y su solución es dada en forma de intervalos, mientras que EM-3 con el sistema de inecuaciones sintetiza las definiciones de crecimiento/decrecimiento de una función pero a la vez lo utiliza para dar solución al problema.

Cabe destacar que el sistema compuesto con las desigualdades $f'(x)>0$ y $f'(x)<0$ planteado por EM-3 y el uso de éstas por parte de EM-2 para evaluar puntos de los intervalos obtenidos con la partición de la recta real a través de los puntos críticos, también constituyen una representación mental por lo que en este caso se identificó una relación entre el proceso de representación mental y el de modelado, según Dreyfus (2002) ambos procesos son una representación parcial del uno con el otro.

El proceso de Generalización: Este proceso fue evidenciado en las respuestas a las preguntas cinco y siete, siendo los estudiantes EM-2 y EM-3 quienes llevaron a cabo tal proceso en ambas preguntas, así en la pregunta cinco, EM-2 obtuvo como intervalos de crecimiento los siguientes: $(-\infty; 0]$; $\left[\frac{4}{3}; \infty\right)$ para luego establecer que la función era creciente en $(-\infty; 0] \cup \left[\frac{4}{3}; \infty\right)$ (ver figura 10); mientras que EM-3 obtuvo los siguientes intervalos: $(-\infty;\ 0)$ y $\left(\frac{4}{3};\ \infty\right)$ concluyendo que la función era creciente en $(-\infty;\ 0) \cup \left(\frac{4}{3};\ \infty\right)$. Por otro lado, en la pregunta siete, ambos estudiantes reconocieron que el sistema era compatible indeterminado (EM-2 estableció que es compatible pero luego expresa que "no se cortan pues pasan por las mismas coordenadas", ver figura 8), siendo EM-3 quien fue más explícito al indicar que la variable "*z*" puede tomar cualquier valor (ver figura 9).

En ambas preguntas, los estudiantes obtuvieron conclusiones a partir de hechos particulares y a la vez dichas conclusiones representaban el todo, esto es característico del proceso de generalización ya que de acuerdo con Dreyfus (2002), en este proceso, el dominio de validez de aquello que se estudia, se obtiene a partir del análisis de hechos particulares que comparten ciertas características, así, en las respuestas a las preguntas cinco y siete, la unión de los subintervalos y el determinar que el sistema posee infinitas soluciones pudiendo "*z*" tomar cualquier valor, representan ese dominio de validez.

El proceso de Sintetización: El proceso de sintetización se identificó en todas las respuestas, ya que éstas presentaban elementos comunes como definiciones, propiedades y/o teoremas, utilización de diversos objetos matemáticos entre otros, que permitieron a los estudiantes llegar a una solución fuese ésta correcta o no, de acuerdo con Dreyfus (2002), los estudiantes aprenden una gran variedad de hechos o conceptos de un determinado tópico de matemática de manera aislada pero más adelante éstos, son integrados e interrelacionados cuando se está en una actividad matemática como en la resolución de las dos pruebas parciales.

CONCLUSIONES

Efectuado los análisis e interpretaciones a los resultados obtenidos de la investigación, se concluye que, en primer lugar, en las respuestas de cada pregunta se identificaron elementos que evidencian procesos del Pensamiento Matemático Avanzado, elementos que son propios del tema objeto de evaluación y que el estudiante manipula adecuadamente. En segundo lugar, se determinó que los procesos menos comunes identificados en las respuestas a las dos pruebas parciales fueron: Modelación, correspondiente a la categoría de Representación y, Generalización, correspondiente a la categoría de Abstracción.

Al analizar los procesos con base en la teoría, se comprendió acerca del por qué los estudiantes llevaron a cabo los mismos y las razones fueron las siguientes:

Cuando los estudiantes utilizaron notaciones y símbolos, externalizaron el conocimiento que tenían sobre el tema objeto de evaluación tanto desde el punto de vista conceptual como procedimental, por lo que constituyeron un medio de comunicación del cual se valieron al resolver o intentar resolver el problema propuesto.

Sobre el proceso de representación mental, se pudo determinar que los temas de evaluación condujeron a los estudiantes a plantear un procedimiento o un concepto que les permitiera iniciar la resolución del problema, además de esto, durante la resolución, se encontraron con situaciones que les indicaban la utilización de conocimientos sobre tópicos relacionados con tales situaciones, es decir, evocaron en la mente del estudiante un marco de referencia, e hicieron uso del mismo, según la teoría utilizada, los estudiantes usaron dichos marcos para interactuar con el mundo externo representado en este caso por las preguntas.

En cuanto al proceso de cambio de representación y traducción, vale destacar que los estudiantes pasaron de una representación a otra conservando la esencia del problema (traducción) que implicara un mejor manejo, total o parcial, del procedimiento de resolución y, de esta manera, intentar lograr una respuesta al problema propuesto, la teoría afirma que no es suficiente tener varias representaciones de un mismo objeto, por lo que se requiere pasar de una representación a otra y esto fue lo que hicieron los estudiantes.

Del proceso de visualización se tiene que, las fórmulas son una externalización de representaciones mentales que los estudiantes poseen sobre determinados objetos matemáticos (reglas de derivación, propiedades, conceptos, entre otros), es decir, visualizan las mismas en su mente y las hacen explicitas en sus respuestas, según la teoría, las representaciones mentales se originan gracias a la visualización, pero además, se establece que este proceso del PMA permite representar objetos matemáticos con la finalidad de conjeturar, razonar, demostrar, entre otros procesos y esto explica el por qué se evidenciaron en las respuestas, la representación gráfica de determinados conceptos, hipótesis o datos del problema por parte de los estudiantes.

Se pudo observar que la finalidad del proceso de modelación, fue incorporar diversos objetos matemáticos bien definidos e interrelacionados, conformando un todo, una estructura, tal y como lo establece la teoría de Dreyfus (2002); del proceso de generalización se tiene que, los estudiantes lo hicieron con la finalidad de presentar un dominio de validez a partir de hechos particulares.

Por último, la teoría permitió comprender acerca del por qué los estudiantes utilizaron una variedad de conocimientos sobre hechos puntuales (fórmulas, conceptos, reglas, propiedades, entre otros) cuando articulaban una respuesta fuese correcta o no, y es que, en realidad lo que hicieron fue integrar una serie de conocimientos que habían adquirido de manera aislada sobre determinados tópicos que, al final, constituyó el proceso de síntesis.

REFERENCIAS

Bardin, L. (1977). Análise de Conteúdo [Libro en línea]. Ediciones 70. Lisboa, Portugal. Disponible en: https://ia802902.us.archive.org/8/items/bardin-laurence-analise-de-conteudo/bardin-laurence-analise-de-conteudo.pdf

Castro, A.; Prat, M. & Gorgorió, N. (2016). Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación. *Revista de Educación* (Madrid). 374. 43-68. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/308765482_Conocimiento_conceptual_y_procedimental_en_matematicas_su_evolucion_tras_decadas_de_investigacion

Dreyfus, T. (2002). Advanced Mathematical Thinking Processes. [Libro en línea] en D, Tall (edi.) *Advanced Mathematical Thinking.* (pp. 44-60). United States of America: Kluwer Academic Publisher. Disponible en: https://www.technicalbookspdf.com/download/?file=15164

Palella, S. y Martins, F. (2012). Metodología de la Investigación Cuantitativa [Libro en línea]. Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Caracas. Disponible en: https://metodologiaecs.files.wordpress.com/2015/09/metodologc3ada-de-la-investigacic3b3n-cuantitativa-3ra-ed-2012-santa-palella-stracuzzi-feliberto-martins-pestana.pdf

Stelzer, F., Andrés, M. L., Canet-Juric, L., Introzzi, I., & Urquijo, S. (2016). Relaciones *entre* el conocimiento conceptual y el procedimental en el aprendizaje de las fracciones. *Cuadernos De Investigación Educativa*, *7*(1), 13 - 27. https://doi.org/10.18861/cied.2016.7.1.2573

Viel, L., y Pereira, A. (2015). Processos do Pensamento Matemático Avançado Evidenciados em Resoluções de Questões do ENADE. *Bolema: Boletim de Educação Matemática* [Revista en línea]. Vol. 29, No. 51. Rio Claro, Brasil. Disponible en: https://www.scielo.br/j/bolema/a/nBQSp4cyLjW6CZgLw8G4jPs/?format=pdf&lang=pt